ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2017

prépa

3

Mathématiques

Option Technologique

Mercredi 12 avril 2017 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 4 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

Partie I : calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ.
   En déduire que P est inversible et préciser la matrice P^{-1}.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de M, et préciser à quelles valeurs propres ils sont associés.
3. En déduire une matrice diagonale D (à préciser) telle que $M = \dfrac{1}{6}PDQ$.
4. Établir que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^n = \frac{1}{6}PD^nQ.$$
5. Justifier que la première colonne de la matrice M^n est :
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.
Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — la natation avec probabilité 1/5
  — le cyclisme avec probabilité 1/5
  — la course à pied avec probabilité 3/5
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — la natation avec probabilité 2/5
  — le cyclisme avec probabilité 3/5
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — le cyclisme avec probabilité 1/5
  — la course à pied avec probabilité 4/5

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'événement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

1. Que valent a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1 ?
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$
Exprimer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.
3. Déterminer alors la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.
4. Établir que pour tout entier naturel n:
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
5. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
6. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

EXERCICE 2

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$ est égale à 75.
2. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
   (b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T = 1) = \dfrac{7}{16}$.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'événement $[T = 1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?
5. On rappelle qu'en langage Scilab l'instruction `grand(1,1,"uin",n1,n2)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre `n1` et `n2`. Compléter, sur votre copie, le programme Scilab suivant afin qu'il affiche une simulation de la variable aléatoire T.

```
T = .........
if  grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
        for k = 1 : 2
                if grand(1,1,"uin",1,4)<2 then
                        T = T+1
                end
        end
else
        ............
        ............
        ............
        ............
        ............
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
```

EXERCICE 3

Partie I : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{4\ln(x)}{x^3}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Résoudre l'inégalité $f(x) \geqslant 0$ d'inconnue $x > 0$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
4. Étudier les variations de f et préciser les extrema de f.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.

6. Tracer dans un repère orthonormé la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, ainsi que la courbe $\mathcal{C}_f$.
   On prendra : $e^{\frac{1}{3}} \simeq 1{,}4$ et $\dfrac{4}{3e} \simeq 0{,}5$.

Partie II : étude d'une variable aléatoire à densité

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3}dx = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

   Montrer que h est une densité de probabilité.

3. On considère dans la suite de cet exercice une variable aléatoire X dont h est une densité.
   (a) Calculer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) Compléter sur votre copie les lignes 3 à 5 du programme Scilab suivant pour que la fonction `F` prenne en entrée un réel x et calcule la valeur de $F(x)$.

```
1  function calcul=F(x)
2          if x < 1 then
3                  ..........
4          else
5                  ..........
6          end
7  endfunction
8
9  for i=1:300, a(i)=-2+7*i/300; b(i)=F(a(i));
10 end
11 plot(a,b)
```

   (c) Qu'obtient-on lors de l'exécution des lignes 9 à 11 du programme précédent ?

4. Montrer que pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A xh(x)dx = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}.$$

   En déduire que X admet une espérance et calculer cette dernière.

5. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

6. Montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1 :

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1 + 2\ln(2A)}{4 + 8\ln(A)},$$

   puis calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} \left(P_{[X>A]}(X > 2A)\right)$.

2017

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

OPTION TECHNOLOGIQUE

CONCOURS ECRICOME PREPA

ESPRIT GÉNÉRAL

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie I : calcul matriciel

1.
$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3 \Longrightarrow P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I_3$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$.

2. • En notant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a : $X_1 \neq 0$ et $MX_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5X_1$.
Ainsi, X_1 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 5.
   • En notant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a : $X_2 \neq 0$ et $MX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$.
Ainsi, X_2 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1.
   • En notant $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a : $X_3 \neq 0$ et $MX_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2X_3$.
Ainsi, X_3 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 2.

3. La matrice M étant de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice P comportant dans ses trois colonnes trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, en notant $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale comportant les valeurs propres correspondantes dans le même ordre, on a donc :
$$M = PDP^{-1} = PD\left(\frac{1}{6}Q\right) = \frac{1}{6}PDQ$$

4. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$ ».
   • Pour $n = 0$, on a $M^0 = I_3$ et également $\frac{1}{6}PD^0Q = PI_3P^{-1} = I_3$, ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.
   • Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :
$$M^{n+1} = M^n \times M = \left(\frac{1}{6}PD^nQ\right)\left(\frac{1}{6}PDQ\right) = \frac{1}{6}PD^n\left(\frac{1}{6}QP\right)DQ = \frac{1}{6}PD^{n+1}Q$$
et ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   • Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

5. La matrice D étant diagonale, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Calculer la première colonne de M^n revient à multiplier à droite par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En écrivant donc le produit, et en calculant successivement de droite à gauche les produits de matrices :

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n \\ 9 \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

1. L'athlète démarrant son entrainement par la natation au jour 0, on a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$. Suivant les règles de l'entraînement, au jour 1, on a alors $a_1 = 1/5$, $b_1 = 1/5$, $c_1 = 3/5$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La famille (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, et avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n \end{aligned}$$

De même, on calcule $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$:

$$b_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

et

$$c_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n$$

3. On a donc :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n \\ \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

En notant $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M$, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

4. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

   - Pour $n = 0$, on a bien $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^0}M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait montré que : $Y_n = \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Alors :

$$Y_{n+1} = AY_n = \left(\frac{1}{5}M\right) \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}}M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Comme $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond à la première colonne de M^n, on a d'après I.5 :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6.5^n} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que :

$$a_n = \frac{5^n - 2^{n+2} + 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 9\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

$$b_n = \frac{2(5^n - 2^n)}{6 \times 5^n} = \frac{1}{3} - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

$$c_n = \frac{3(5^n + 2^{n+1}) - 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

6. Comme $-1 < 1/5 < 1$ et $-1 < 2/5 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. On en déduit finalement que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

Partie I : tirages dans une urne

1. (a) On reconnaît ici une épreuve succès/échec qui se répète dans des conditions identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable X comptant le nombre de succès sur les 400 épreuves suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(400, \frac{1}{4}\right)$.

   On a donc $X(\Omega) = [\![0, 400]\!]$ et : $\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}$.

   (b) L'espérance de X est alors $400 \times \frac{1}{4} = 100$ et la variance est $400 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 75$.

2. (a) On est toujours dans le cadre d'une répétition d'épreuves succès/échec identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable Y déterminant le rang d'apparition du premier succès suit donc une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$.

   On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)$.

   (b) L'espérance de Y est alors $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et la variance est $\frac{\frac{3}{4}}{(\frac{1}{4})^2} = 12$.

3. (a) Si on tire les boules sans remise, Z ne peut prendre que les valeurs $1, 2, 3, 4$:

$$\boxed{Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}}$$

Notonrs B_k (respectivement N_k) « le k-ième tirage donne une boule blanche (resp. noire) ».

- $P(Z = 1) = P(N_1) = \frac{1}{4}$.
- $P(Z = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
- $P(Z = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- et nécessairement $P(Z = 4) = 1 - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3) = \frac{1}{4}$.

Ainsi Z suit une <u>loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$</u>.

(b) L'espérance de Z est donc $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ et la variance est $\frac{4^2 - 1}{12} = \frac{5}{4}$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

1. Sur les deux tirages effectués on peut avoir tiré 0, 1 ou 2 fois la boule noire. Ainsi $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
2. Notons F l'événement « la pièce donne Face »et $\overline{F}$ l'événement « la pièce donne Pile ». Alors :

$$P(T = 0) = P(F)P_F(B_1 \cap B_2) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32}$$

$$P(T = 2) = P(F)P_F(N_1 \cap N_2) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{32}$$

On en déduit que :

$$P(T = 1) = 1 - P(T = 0) - P(T = 2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

3. $E(T) = \sum_{k=0}^{2} kP(T = k) = P(T = 1) + 2P(T = 2) = \frac{7}{16} + 2\frac{5}{32} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Si T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on aurait alors nécessairement $n = 2$ (vu $T(\Omega)$), $E(T) = 2p$, donc $p = \frac{3}{8}$. Mais alors on devrait avoir $P(T = 2) = p^2$, ce qui n'est pas le cas ici. Donc T ne suit pas une loi binomiale.

4. Remarquons que si F se réalise, alors la loi de T est binomiale de paramètres $(2, 1/2)$. On a donc par exemple :

$$P_F(T = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Donc :

$$P_{[T=1]}(F) = \frac{P(F)P_F(T = 1)}{P(T = 1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7}$$

et donc on en déduit que $P_{[T=1]}(\overline{F}) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

Finalement, si $[T = 1]$ est réalisé, il est plus probable d'avoir obtenu Face avec la pièce.

5.
```
T = 0
if  grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
  for k = 1 : 2
    if grand(1,1,"uin",1,4)<2 then
      T = T+1
    end
  end
else
  for k = 1 : 2
    if grand(1,1,"uin",1,4)<3 then
      T = T+1
    end
  end
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
```

EXERCICE 3

Partie I : étude d'une fonction

1. Pour tout réel x, $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. De plus, sur $]0, +\infty[$ le dénominateur ne s'annulant pas, $f(x)$ a bien un sens pour tout $x > 0$.

$$\boxed{D_f =]0, +\infty[}$$

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 \geqslant 0$ donc :

$$f(x) \geqslant 0 \iff \frac{4\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$$

3. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Par ailleurs, par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3} = 0$.
La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

4. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \; f'(x) = \frac{4\frac{1}{x}x^3 - 4\ln(x)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{4x^2(1 - 3\ln(x))}{x^6}$$

Le signe de f' dépend donc du signe de $1 - 3\ln(x)$:

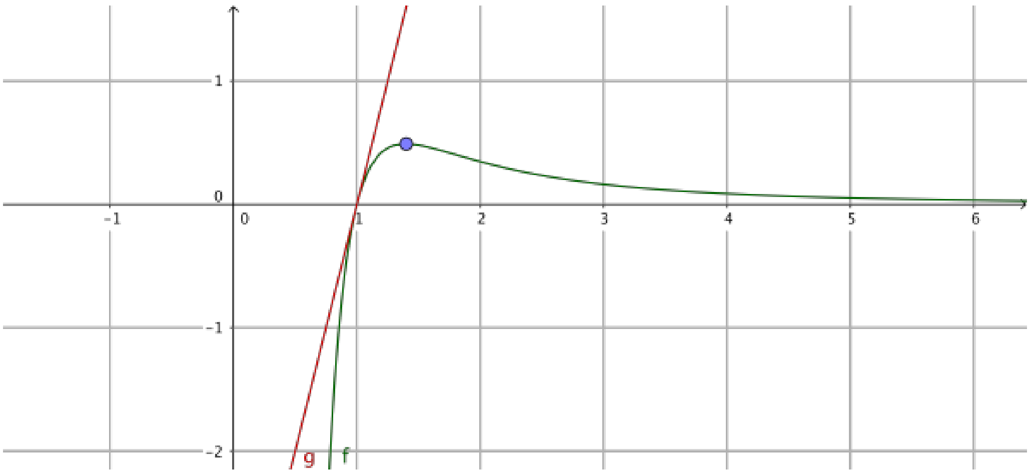
$$1 - 3\ln(x) \geqslant 0 \iff 3\ln(x) \leqslant 1 \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{3} \iff x \leqslant e^{1/3}$$

La fonction f est donc croissante sur $]0, e^{1/3}[$ puis décroissante sur $]e^{1/3}, +\infty[$.
La fonction f admet donc un maximum (global) en $e^{1/3}$, qui vaut : $f(e^{1/3}) = \dfrac{4}{3e}$.
La fonction f admettant $-\infty$ comme limite en 0^+, elle n'est pas minorée et n'admet donc pas de minimum.

5. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet comme équation :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1), \quad \text{i.e. } \boxed{y = 4x - 4}$$

6.



Partie II : étude d'une variable aléatoire à densité

1. Soit $A \geqslant 1$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{4}{x^3} \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{-2}{x^2} \end{cases}$$

On a alors en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3}dx = \left[-\frac{2\ln(x)}{x^2}\right]_1^A + \int_1^A \left(\frac{2}{x^3}\right)dx = \frac{-2\ln(A)}{A^2} + \left[\frac{-1}{x^2}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}$$

2. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $[1, +\infty[$ et on a bien $f(1) = 0$.
La fonction h est positive sur $\mathbb{R}$ puisque, pour $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 0$.
De plus, en utilisant les croissances comparées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}\right) = 1$$

Ainsi, h est bien une densité de probabilité.

3. (a) Pour $x < 1$, $F(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 1$, en reprenant le calcul de la question 1,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)dt = \int_1^x f(t)dt = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x^2}$$

(b)
```
1  function calcul=F(x)
2          if x < 1 then
3                  calcul = 0
4          else
5                  calcul = 1 - 1/(x^2)-2*log(x)/(x^2)
6          end
7  endfunction
8
9  for i=1:300, a(i)=-2+7*i/300; b(i)=F(a(i));
10 end
11 plot(a,b)
```

(c) L'exécution des lignes 9 à 11 permet de tracer la fonction F sur l'intervalle $[-2;5]$.

4. Soit $A \geqslant 1$. On a :

$$\int_1^A xh(x)dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^2}dx$$

En faisant une intégration par parties, comme dans la question 1, en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \dfrac{4}{x^2} \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{-4}{x} \end{array}\right.$$

on obtient :

$$\int_1^A xh(x)dx = \left[\frac{-4\ln(x)}{x}\right]_1^A + \int_1^A \frac{4}{x^2}dx = \frac{-4\ln(A)}{A} + \left[-\frac{4}{x}\right]_1^A = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}$$

Par croissances comparées, on en déduit donc que : $\displaystyle\int_1^A xh(x)dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx = \int_1^{+\infty} xh(x)dx$ converge.

La variable X admet donc bien une espérance et on a :$E(X) = 4$.

5. La variable X admet une variance si et seulement si $E(X^2)$ existe, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2h(x)dx$ converge.

Or,

$$\int_1^A x^2h(x)dx = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x}dx = \left[2(\ln x)^2\right]_1^A = 2(\ln(A))^2 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2h(x)dx$ est donc divergente, X^2 n'admet pas d'espérance, et donc X n'a pas de variance.

6. Pour $A > 1$, on a :

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{P([X > A] \cap [X > 2A])}{P(X > A)} = \frac{P(X > 2A)}{P(X > A)} = \frac{1 - F(2A)}{1 - F(A)} = \frac{\frac{1}{(2A)^2} + \frac{2\ln(2A)}{(2A)^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{2\ln(A)}{A^2}} = \frac{1 + 2\ln(2A)}{4 + 8\ln(A)}$$

Enfin, on a :

$$\lim_{A\to+\infty} P_{[X>A]}(X > 2A) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1 + 2\ln(2) + 2\ln(A)}{4 + 8\ln(A)} = \lim_{A\to+\infty} \frac{2\ln(A)\left(\dfrac{1}{2\ln(A)} + \dfrac{\ln(2)}{\ln(A)} + 1\right)}{8\ln(A)\left(\dfrac{1}{2\ln(A)} + 1\right)} = \frac{1}{4}$$

CONCOURS ECRICOME PREPA

RAPPORT D'EPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,19 et un écart-type de 5,85, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice mêlant algèbre et probabilités avait pour but de vérifier les acquis des candidats sur les calculs matriciels, et sur leur application à l'étude d'une chaîne de Markov. Il a en général été assez bien abordé par les candidats qui ont su montrer leurs savoirs-faire sur ce type d'exercice.

Partie I

1. Le calcul de PQ est globalement satisfaisant. Il est dommage que certains candidats ne voient pas le lien avec la matrice identité. Certains candidats, même après avoir obtenu $PQ = 6I$ se lancent dans la méthode du pivot de Gauss pour déterminer P^{-1}.
2. On note une amélioration par rapport à 2016 sur les notions de valeurs propres et vecteurs propres. La méthode de calcul est connue, on attend cependant des candidats qu'ils précisent (au moins une fois) que les vecteurs sont non nuls pour montrer qu'ils sont vecteurs propres.
3. Les candidats trouvent souvent la bonne matrice diagonale D mais, soit ne justifient pas leur résultat, soit le font en transformant la relation donnée $M = \frac{1}{6}PDQ$. Très peu d'entre eux invoquent la diagonalisation de M et montrent le rapport avec la matrice de passage P donnée par l'énoncé.
4. Un raisonnement par récurrence était attendu par les candidats, et la rédaction a été globalement satisfaisante, ce qui montre une nette amélioration par rapport aux sessions précédentes. Certains candidats maladroits initialisent avec $n = 1$ au lieu de $n = 0$.

5. Pour le calcul de D^n, on attend des candidats qu'ils précisent que D est diagonale pour parvenir au résultat. Certains candidats s'arrêtent avant de démarrer les calculs de produits matriciels. Certains candidats passent d'une matrice 3×3 à une matrice colonne sans aucune explication. De même, quelques copies présentent des calculs « arrangés », avec des erreurs de signe qui mènent quand même au résultat écrit dans l'énoncé. Ces copies malhonnêtes sont souvent dévalorisées dans la suite de la correction, du simple fait qu'elles peuvent amener le correcteur à remettre en doute toute autre réponse du candidat.

Partie II

1. Les données de l'énoncé furent généralement bien interprétées par l'ensemble des candidats afin d'obtenir les valeurs initiales du processus, il est inutile de justifier très longuement les résultats. Certains d'entre eux ont tout de même considéré une répartition uniforme entre les sports pratiqués à l'instant 1.
2. Les candidats peinent à citer le bon système complet d'événement. On attend dans cette question une écriture correcte en événements puis une substitution par les données de l'énoncé. Beaucoup confondent les écritures a_i et A_i, traduisant une indifférence entre événements et probabilités. Les deux autres relations sur b_{n+1} et c_{n+1} peuvent être données directement.
3. La question a été quasi-systématiquement réussie par les candidats ayant obtenu les relations de récurrence à la question précédente. Seuls certains candidats maladroits donnent pour A un vecteur colonne.
4. On attendait ici un raisonnement par récurrence, souvent bien maîtrisé.
5. De nombreux candidats n'ont pas vu le lien avec la partie I et se sont arrêtés à cette question. On pourra faire remarquer aux futurs candidats que multiplier une matrice par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ revient à prendre la première colonne de la matrice.
6. On relève de nombreuses erreurs de calcul, ou des simplifications abusives dans les fractions, peu de copies parviennent au bout des calculs. Les candidats doivent parfois prendre un peu de recul quant à leurs réponses, les limites proposées étant parfois infinies ou supérieures à 1, alors que a_n, b_n, c_n sont des probabilités telles que $a_n + b_n + c_n = 1$.

Exercice 2

Cet exercice de probabilités discrètes avait pour but de vérifier la bonne maîtrise des différentes lois usuelles au programme, et d'évaluer les connaissances en langage Scilab. L'exercice a révélé une connaissance du cours trop approximative chez de nombreux candidats, les lois usuelles étant souvent confondues et les formules mal apprises.

Partie I

1. Cette question de cours (ainsi que la suivante) sont bien valorisées dans le barème pour favoriser les candidats qui rédigent correctement le recours à une loi usuelle. La loi binomiale est souvent reconnue, mais la justification peut rester approximative, par exemple sur l'indépendance des épreuves de Bernoulli. Nous rappelons que la notation C_n^k des coefficients binomiaux n'est pas au programme.
2. La loi géométrique est également souvent reconnue, mais les valeurs de $P(Y = k)$, espérance et variance sont parfois erronées.
3. Cette question plus délicate a en revanche posé beaucoup de problèmes aux candidats. Très souvent, ils ont cherché à répondre en utilisant des modèles de lois usuelles. Beaucoup n'ont pas lu attentivement l'énoncé, considérant des tirages avec remise. Certains candidats ont eu la bonne intuition concernant une loi uniforme ici. On attendait un raisonnement prouvant cette conjecture, idéalement en appliquant la formule des probabilités composées. La formule donnant la variance d'une loi uniforme discrète n'est pas toujours connue.

Partie II

Cette partie a été moins abordée, et souvent de façon erronée, les raisonnements attendus étant un peu plus fins.
La questions en Scilab, est traitée seulement par la moitié des candidats et a été souvent mal comprise, et finalement très peu correcte dans l'ensemble des copies. Rappelons que ce genre de question est largement valorisé dans le barème et ne nécessite qu'un peu d'investissement en algorithmique.

Exercice 3

Cet exercice d'analyse et probabilités avait pour but de vérifier les connaissances sur les études de fonctions, puis d'appliquer les techniques d'intégration à l'étude d'une densité de probabilité. La partie I a été maltraitée par la plupart des candidats, mettant en valeur des erreurs de logique et de calculs élémentaires. La partie II, fournissant les résultats à démontrer, a été mieux abordée. Nous ne pouvons qu'encourager les futurs candidats à s'entraîner sur cet exercice pour les sessions à venir.

Partie I

1. La recherche de l'ensemble de définition a été plutôt mal faite, montrant de certains candidats une méconnaissance de la fonction logarithme népérien. Certains candidats confondent la condition d'existence de $\ln(x)$ avec la condition $\ln(x) > 0$.
2. De même qu'à la question précédente, la fonction ln est mal connue des candidats (qui pensent souvent qu'elle est positive) et la résolution d'inégalités est un exercice difficile pour beaucoup. Peu de candidats raisonnent en utilisant des équivalences, en justifiant les transformations effectuées et en concluant par l'ensemble de solutions.
3. Seuls de rares candidats parviennent à déterminer les limites correctement. Pour la limite en 0, on attend des candidats qu'ils précisent le signe du dénominateur. Pour la limite en $+\infty$ (et elle seule), on attend des candidats qu'ils citent explicitement qu'ils utilisent le théorème de croissances comparées.
4. Le calcul de la dérivée était globalement correct, mais les candidats ont peiné à simplifier et factoriser le résultat et étudier le signe de la dérivée. Beaucoup de candidats résolvent l'équation $f'(x) = 0$ plutôt que de résoudre une inégalité.
5. Les candidats connaissent la méthode et la formule, mais donnent souvent une réponse incomplète. L'écriture seule de « $f'(a)(x-a) + f(a)$ »n'est pas une équation de tangente.
6. Le tracé de courbe est, comme les années précédentes, une question peu abordée par les candidats. C'est dommage car la question est en général valorisée. On attend un travail soigné, et une cohérence avec les résultats de l'énoncé ou démontrés précédemment. Les candidats ayant du mal à tracer la courbe auraient pu au moins tracer la tangente de la question précédente.

Partie II

1. L'intégration par parties est bien assimilée et correctement traitée lorsque les candidats trouvent les bonnes primitives. Au niveau de la rédaction, on attend des candidats qu'ils fassent apparaître clairement la formule d'intégration par parties et les fonctions utilisées. La principale erreur commise par les candidats a été de considérer la fonction $x \mapsto x^3$ au lieu de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.
2. Cette question a été bien comprise par les candidats, connaissant systématiquement la bonne définition d'une densité de probabilité. Plusieurs copies se contentent de citer le théorème du cours sans chercher à en vérifier les hypothèses, et on peut regretter un manque d'explication dans les étapes (continuité par morceaux, relation de Chasles, convergence d'intégrales, ...).

3. (a) Cette question ne demandait qu'à utiliser les questions 1 et 2, les candidats ayant la bonne définition de la fonction de répartition ont donc bien traité la question. La principale erreur était d'écrire $F(x) = \int_1^x f(x)dx$.

   (b) La question Scilab a été encore peu correcte chez les quelques candidats qui l'abordent. Si ces derniers ont bien compris qu'il fallait calculer $F(x)$, il s'agissait ici d'utiliser correctement le langage informatique. On attendait surtout des candidats qu'ils utilisent des `calcul=...` et non des `F(x)=...`, et qu'ils écrivent correctement les fractions en langage informatique. Cette question simple est bien rémunérée pour les quelques candidats qui la traitent correctement.

   (c) Il était attendu des candidats qu'ils repèrent un tracé de courbes, en citant l'intervalle sur lequel était étudiée la fonction.

4. Bien que l'indication ne figure pas dans l'énoncé, la plupart des candidats ayant répondu ont bien compris qu'une intégration par parties était nécessaire. Le calcul a alors été bien traité par les candidats, avec les mêmes problèmes de rédaction soulevés qu'à la question 1. Bien que souvent maladroites, les réponses pour l'espérance ont été satisfaisantes.

5. Cette question, plus délicate, la réponse n'étant pas donnée, a été peu abordée par les candidats. Les candidats avaient compris qu'ils devaient calculer $E(X^2)$ mais peu ont su calculer $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}dx$.

6. Le calcul de la probabilité conditionnelle est bien traité, mais le calcul de la limite finale a soulevé de gros problèmes pour de nombreux candidats.